PHBern
Pädagogische Hochschule

Mathematische Grundvorstellungen und Denkhandlungen[1]

«Denken ist eine Voraussetzung des Lernens, aber nicht jedes Denken ist auch Lernen. Ein zentrales Bestimmungsmerkmal für kognitives Lernen ist die Veränderung des Denkens» (Gropengiesser 2003, S. 32).

Damit Denken zu neuen Erkenntnissen führt, ist ein Auf- und Umbau von Vorstellungen wichtig. Dies ist ein subjektiver Prozess. Jede Person muss Vorstellungen eigenständig entwickeln. Sie können nicht von aussen zugeführt oder übernommen werden (vgl. Baalmann, Frerichs, Weitzel, Gropengiesser & Kattmann, 2004).

Verstehensprozesse, gehen vom *Singulären* aus, das heisst von individuellen Vorstellungen der Lernenden. Um neue Erkenntnisse gewinnen zu können, müssen bestehende Konzepte angepasst, weiterentwickelt und neu strukturiert werden (vgl. Gallin & Ruf, 1998).

Demgegenüber stehen fachlich tragfähige Vorstellungen, sozusagen die fertige Mathematik. Gallin (vgl. ebd.) nennt es die Vorstellungen der *Rückschau*. Sie bestehen aus normativ geklärten Begriffen des Fachwissens. Der Begriff *Grundvorstellung* steht für solche präskriptive, tragfähige Interpretationen mathematischer Konstrukte (vgl. Prediger 2011). Grundvorstellungen beziehen sich auf zentrale Prozesse der mathematischen Begriffs- und Modellbildung.

Sie zielen auf die Struktur des mathematischen Inhalts und ermöglichen, mathematische Begriffe und Operationen zur Mathematisierung einzusetzen, sei das für innermathematische wie auch für *lebensweltliche* Problemstellungen (vgl. Leiss et al., 2008). Aus Sicht der Lehrenden stellen sich Fragen wie:

- *Welche Vorstellungen braucht es, um das Konzept der Dezimalbrüche zu verstehen?* (Bsp. Stellenwerttabelle)
- *Welche Vorstellungen braucht es, um das Operieren mit Brüchen zu verstehen? (*Bsp. Rechteckmodell)

Die Festlegung dieser normativen Grundvorstellungen erfolgt im Dialog zwischen dem mathematischen Inhalt und den Lehrenden resp. den Mathematikdidaktikerinnen -didaktiker. Die Sicht der Lernenden ist dabei noch nicht miteinbezogen.

Lernende müssen neue Erfahrungen in die existierenden kognitiven Strukturen einarbeiten, um diese mit den bisherigen Erkenntnissen verbinden zu können. «Dieses Grundverständnis enthält insbesondere, dass Lernen neben dem Neulernen oft auch ein Umlernen bedeutet, weil bisher erworbene Vorstellungen umgebaut oder erweitert werden müssen» (Lengnink, Prediger & Weber 2011, 2). Die individuellen Vorstellungen werden immer wieder mit dem *regulären Wissen* abgeglichen und umgebaut, bis sie mit den normativ gesetzten Grundvorstellungen kohärent scheinen (vgl. Gallin & Ruf 1998).

[1] Detaillierte Ausführungen zu diesem Thema in Nydegger-Haas, Annegret. (2018). Algebraisieren von Sachsituationen. Wechselwirkungen zwischen relationaler und operationaler Denk- und Sichtweise. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Dabei sind die unterschiedlichen Repräsentationsebenen *enaktiv, ikonisch* und *symbolisch* bedeutsam. Sie ermöglichen einen beweglichen Wechsel zwischen der operationalen (handeln, zeichnen, operieren) und relationalen (Beziehungen erkennen) Denkweise.

Vorstellungen der Lernenden sind, im Gegensatz zu den normativen Grundvorstellungen, nicht so leicht zu fassen. Sie werden oft erst bei gezieltem Nachfragen sichtbar. Dabei kann Erstaunliches zutage treten: Ein Schüler (8. Schuljahr) erklärt, dass die Zahl 2,135 grösser ist als die Zahl 2,3. Sein Denkkonzept zu den Dezimalbrüchen stimmt nicht mit den entsprechenden Konventionen überein. Er begründet: «Je mehr Stellen eine Zahl hat, desto grösser ist sie». Diese Vorstellung ist im Umgang mit natürlichen Zahlen richtig. Hier, bei den Dezimalbrüchen, trifft sie nicht zu. Der Schüler muss seine Zahlvorstellung aus- und umbauen. Diese Vorstellung ist im Bereich $x<1$ nicht mehr tragfähig, wodurch sie umgebaut werden muss. Bei grossen wie kleinen Zahlen gilt, dass die Positionen der Ziffern den Wert der Zahl angeben. Von Spalte zu Spalte in Richtung links verzehnfacht sich der Wert der Zahl, umgekehrt Richtung rechts wird der Wert 10-mal so klein. Zur Visualisierung sind Modelle zum Dezimalsystem, wie die Stellenwerttabelle oder das Dines-Material hilfreich. Lernende werden dabei ihre Vorstellungen nicht einfach verwerfen können, sie müssen sie am Modell prüfen und umbauen (relationale Sichtweise).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Lernen nicht als ein Ersetzen von (Fehl-) Vorstellungen, sondern ein Überarbeiten, Annähern, Anpassen der eigenen Vorstellungen an entsprechende Grundvorstellungen zu verstehen ist (vgl. Hahn & Prediger 2008). Es ist eine mathematikdidaktische Aufgabe, solche Entwicklungsprozesse einer Annäherung der individuellen Vorstellungen hin zu Grundvorstellungen zu untersuchen (Prediger 2011, S. 2).

PHBern
Pädagogische Hochschule

Literaturverzeichnis

Baalmann, Wilfried; Frerichs, Vera; Weitzel, Holger; Gropengiesser, Harald & Kattmann, Ulrich. (2004). Schülervorstellungen zu Prozessen der Anpassung – Ergebnisse einer Interviewstudie im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, *10* (1), 7-28.

Gallin, Peter & Ruf, Urs. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule.* Seelze: Kallmeier.

Gropengiesser, Harald. (2003). Lernen und Lehren: Thesen und Empfehlungen zu einem professionellen Verständnis. *Report, 26* (3), 29-39.

Hahn, Steffen & Prediger, Susanne. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29* (3-4), 163-198.

Leiss, Dominik; Blum, Werner; Messner, Rudolf; Müller, Marcel; Schukajlow, Stanislaw & Pekrun, Reinhard. (2008). *Modellieren lehren und lernen in der Realschule. Beiträge zum Mathematikunterricht*, 370-373. Tagung: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008 (13.03.2018 – 18.03.2018), Budapest.

Lengnink, Katja; Prediger, Susanne & Weber, Christof. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen – Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. In *PM-Praxis der Mathematik in der Schule 52* (40), 2-7.

Nydegger-Haas, Annegret. (2018). Algebraisieren von Sachsi-tuationen. Wechselwirkungen zwischen relatio-naler und operationaler Denk- und Sichtweise. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Prediger, Susanne. (2011). Vorstellungsentwicklungsprozesse initiieren und untersuchen. *Der Mathematikunterricht, 57* (3), 5-14. Heidelberg, Berlin: Friedrich Verlag.