Denk- und Sichtweisen[1]

Mathematische Objekte stehen für einen bestimmten Wert oder beschreiben Beziehungen.

Beispiel:
- 3+3 lässt sich regelgeleitet berechnen → 3+3 = 6.
- Der Term 3+3 kann auch interpretiert werden. (Bsp. Es werden zwei gleich grosse Teile zusammengefügt. Dies können Geldbeträge, Gewichtsangaben o. ä. sein.)

Namhafte Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker (Kaput, 1999; Malle & Wittmann, 1993; Prediger, 2009; Rojano, 1996; Sfard, 1991; Tall, Gray & Simpson, 1999) betonen die Bedeutsamkeit dieser beiden Denkweisen. Für Lernende stellen diese beiden Sichtweisen eine Herausforderung dar. «Diese Zweideutigkeit der Notation ist eine wichtige Grundlage des flexiblen Denkens, d.h. der geistigen Beweglichkeit zwischen dem Prozess als Ausführung der zielführenden Operationen und dem Konzept als einem Teil einer umfassenden mentalen Struktur» (Schneeberger 2009, S. 137f).

Dieses Phänomen wird in der Literatur mit unterschiedlichen Begriffen beschrieben. Schneider (2006) spricht von unterschiedlichen Wissensarten und geht in einer Theorierecherche den Begriffspaaren nach, die sich jeweils als zwei Gegenpole beschreiben lassen. Er fasst diese unter dem Begriff *dual component theories of cognition* zusammen. Auch wenn die Begriffspaare unterschiedliche Nuancen fokussieren, haben sie doch alle einen gemeinsamen Kern. Sie beschreiben zwei gegenteilige Denkweisen, die sich so auch im Bereich des mathematischen Denkens finden. Die eine ist strukturell, interpretierend, die andere ist operational-funktional. (Schneider 2006, S. 49).

Wissensarten oder Denkformen		
Ryle, 1949	knowing that	knowing how
Polanyi, 1962	focal knowledge	tacit knowledge
Chomsky 1965	structures	procedures
Piaget, 1978	Mathematical understanding	algorithmic performance
Inhelder & Piaget, 1980	principles	skills
Resnick, 1982	semantic knowledge	syntactic knowledge
Hiebert, 1986	conceptual knowledge	procedural knowledge
Schacter, 1987	explicit knowledge	implicit knowledge
Oberauer, 1993	Faktenwissen	Anwendungswissen
Baroody, 2003	knowing why	knowing how to
Nydegger 2018	relational	operational

Abbildung 1: Begriffspaare zu relational – operational (in Anlehnung an Schneider 2006, S. 56)

[1] Detaillierte Ausführungen zu diesem Thema in Nydegger-Haas, Annegret (2018). *Algebraisieren von Sachsituationen. Wechselwirkungen zwischen relationaler und operationaler Denk- und Sichtweise.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Im Folgenden ist von operationaler und relationaler Sicht- oder Denkweise die Rede. Die Bedeutung der Denkweisen können in Gegenüberstellungen gut kontrastiert werden. Die beiden Begriffe helfen zu präzisieren, wie ein Objekt betrachtet wird. Dies im Hinblick darauf, ob vorwiegend eine Anleitung umgesetzt wird oder ob der Blick auf das Objekt eher vernetzender und interpretierender Natur ist. Nach Schneider (2006) repräsentiert sich die relationale Denkweise (*engl. conceptual*) durch symmetrische und untereinander vernetzte Schemata, während operationales (*engl. procedural*) Denken durch zielgerichtete und nicht vernetzende Produktionsregeln charakterisiert wird (lineares Denken). Um diese Begriffe zu schärfen, werden Adjektive zu Denk- oder Sichtweisen, gestützt auf Schneider (2006) und Sfard (1991), aufgelistet.

Relationale Denk- oder Sichtweise richtet den Blick auf Relationen und Zusammenhänge und ist...		Operationale Denk- oder Sichtweise richtet den Blick auf die numerische Charakteristik eines Sachverhaltes und ist...
vernetzend		regelgeleitet
interpretierend	loslösen abstrahierend einkapselnd (encapsulation)	ausführend
verallgemeinernd		schrittweise
systematisierend	→	interpretationsfrei
begründend		grammatikalisch
Struktur bewusst machend	konkretisieren	Handlungsmustern folgend
Beziehungen erkennend	interpretieren (deencapsulation)	losgelöst vom Kontext
Verständnis aufbauend	←	Rezept geleitet
konzeptuell		algorithmisch

Abbildung 2: Adjektive zu Denk- oder Sichtweisen

Schneider (2006) betont, dass es kaum möglich ist, die beiden Sichtweisen isoliert zu betrachten. Können und Tun bedienen sich sowohl eines relationalen als auch eines operationalen Denkens. Jeder Lösungsprozess fordert zielgerichtetes Handeln (*operational*) und vernetzendes, konzeptuelles Denken (*relational*). Somit muss beim Bearbeiten von Problemstellungen auf beide Sichtweisen zurückgegriffen werden. Eine Lösung, die nur durch vernetzendes, konzeptuelles Denken erarbeitet wird, gibt es wohl kaum. Geht man davon aus, dass jemand nur relationales Denken praktiziert, werden ihm die Handlungen und

Ausführungen (operational), die eine Untersuchung des Sachverhaltes ermöglichen, fehlen.

Beispiel 7rs_b Skala
Die Schülerin und der Schüler wollen das Volumen der Tasche bestimmen. Sie suchen jedoch nur auf der Ebene von Referenzgrössen und Vergleichen und sind nicht in der Lage, den Inhalt zu berechnen.

Werden nur Operationen angewendet, ohne einen Blick auf Zusammenhänge und Beziehungen zu richten, fehlen Sinnzusammenhänge und Interpretationsmöglichkeiten (Schneider 2006, S. 98). Beide Denk- oder Sichtweisen sind somit eng miteinander verwoben.

Gray & Tall (1994) stellen dazu Untersuchungen zum Zahlverständnis der Grundschülerinnen und Grundschüler vor. Sie zeigen auf, wie Prozeduren (operationale Sichtweise) und das Vernetzen von Objekten (relationale Sichtweise) unabdingbar miteinander verbunden sind und dass dazu bewegliches Denken gefordert ist. Wird ein mathematisches Objekt so weit verstanden, dass beide Sichtweisen präsent und beweglich verfügbar sind, sprechen Gray & Tall von *Procept*. Erst dann wird das mathematische Objekt auch beweglich nutzbar. Dazu führen sie verschiedene Beispiele im Aufbau der Grundoperationen an.

> «The use of a symbolism to mean both process and product occurs throughout mathematics. A number such as “three” involves both the process of counting and the concept of number. The symbolism 2+2 stands for both the process of addition and the concept of sum. This phenomenon occurs again and again» (Gray & Tall 1994, S. 3).

Auch Sfard (1991) beschreibt diesen Sachverhalt mit dem Bild einer Münze. Eine Münze hat, ähnlich einem mathematischen Objekt, zwei Ansichten, und zwar eine Vorder- und Rückseite. Beide Seiten gehören zur Münze, ohne diese wäre sie inexistent. Vorder- und Rückseite sind auf den ersten Blick nicht gleichzeitig sichtbar. Um die Münze als Ganzes zu kennen, muss man beide Seiten in Betracht ziehen. Es braucht einen Wechsel zwischen den beiden Ansichten. Dieses Bild geht einher mit der Aussage von Schneider (2006), der darauf hinweist, dass die beiden Denkweisen kaum isoliert beobachtet werden können. Der Aufbau von mathematischem Verständnis ist durch diese beiden Sichtweisen und den Wechsel zwischen ihnen geprägt.

Den Wechsel von der relationalen zur operationalen Sichtweise beschreibt Sfard mit *encapsulation*. Das mit Vernetzungen und Beziehungen behaftete mathematische Objekt wird von seinen inhaltlichen Bezügen losgelöst, also eingekapselt. Sobald eine Loslösung geschafft ist, kann der mathematische Ausdruck regelgeleitet umgeformt werden (von relational zu operational). Nun steht nur noch eine Zahl, ein Term oder eine Operation im Fokus.

Der Wechsel von der operationalen zur relationalen Sichtweise wird als *deencapsulation* bezeichnet. Das mathematische Objekt kann wieder zum Beschreiben von Sachverhalten oder Zusammenhängen genutzt werden. Nach Operationen und Umformungen entstehen neue Ausdrücke (Terme), die wiederum interpretiert werden können. Neue Zusammenhänge und Muster werden sichtbar.

Beispielsweise sind erste Zählübungen im Vorschulunterricht ein Auswendiglernen der Zahlwörter (operational). Um die Zahlbegriffe zu verstehen braucht es aber auch Bezüge zur Deutung der Zahlen. Nachdem ein beweglicher Umgang mit Zahlen aufgebaut ist, so dass sowohl der Zahlbegriff als auch ein Interpretieren von Zahlen gelingt, werden Vorstellungen zu den Rechenoperationen aufgebaut (relational). Die Lernenden erkennen in Situationen additive Strukturen. Sind diese gut verstanden, wird die Addition als Verfahren verfügbar, ungeachtet der unterschiedlichen Situationen (operational).

PHBern
Pädagogische Hochschule

Literaturverzeichnis

Gray, Eddie & Tall, David. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A «proceptual» view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education, 25* (5), 116-140.

Kaput, James J. (1999). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 256-281.

Malle, Günther & Wittmann, Erich. C. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Wiesbaden: Vieweg.

Prediger, Susanne. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. In Fritz Annemarie & Schmidt, Siegbert (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (213-234). Weinheim: Beltz.

Rojano, Teresa. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. In Bednarz Nadine, Kieran; Carolyn & Lee Lesley (Hrsg.), *Approaches to algebra* (55-62). Dortrecht: Kluver Academic Publishers.

Schneeberger, Martin. (2009). *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog.* Münster: Waxmann Verlag.

Schneider, Michael. (2006). *Konzeptuelles und prozedurales Wissen als latente Variablen: ihre Interaktion beim Lernen mit Dezimalbrüchen*. Dissertation, Universität Berlin.

Sfard, Anna. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22* (1), 1-36.